Électromagnétisme – Chapitre 5

Propagation des ondes – TD

Exercice 1 : Questions de cours

1. Rappeler l'équation de d'Alembert unidimensionnelle vérifiée par une onde $s(x,t)$ de vitesse v.

2. Établir la relation de dispersion vérifiée par une onde de la forme :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega\, t - k\, x + \varphi).$$

3. Établir la relation de dispersion vérifiée par une onde de la forme :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega\, t + \varphi_1) \cos(k\, x + \varphi_2).$$

Correction :

1. L'équation de d'Alembert unidimensionnelle s'écrit : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$.

2. On peut exprimer :

- $\dfrac{\partial s}{\partial x} = k\, s_0 \sin(\omega\, t - k\, x + \varphi)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2\, s_0 \cos(\omega\, t - k\, x + \varphi) = -k^2\, s(x,t)$;
- $\dfrac{\partial s}{\partial t} = -\omega\, s_0 \sin(\omega\, t - k\, x + \varphi)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2\, s_0 \cos(\omega\, t - k\, x + \varphi) = -\omega^2\, s(x,t)$.

L'équation de d'Alembert donne alors : $-k^2\, s(x,t) - \dfrac{1}{v^2}\left[-\omega^2\, s(x,t)\right] = 0$, d'où on en déduit la relation de dispersion : $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T}$.

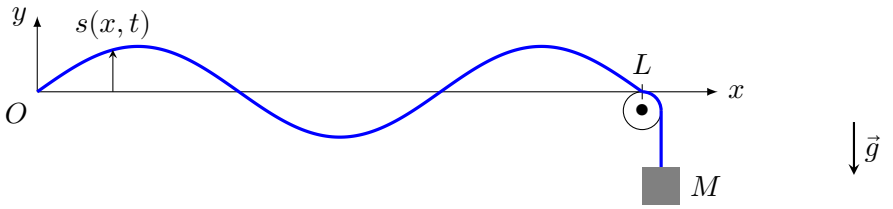
3. On peut exprimer :

- $\dfrac{\partial s}{\partial x} = -k\, s_0 \cos(\omega\, t + \varphi_1) \sin(k\, x + \varphi_2)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2\, s_0 \cos(\omega\, t + \varphi_1) \cos(k\, x + \varphi_2) = -k^2\, s(x,t)$;
- $\dfrac{\partial s}{\partial t} = -\omega\, s_0 \sin(\omega\, t + \varphi_1) \cos(k\, x + \varphi_2)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2\, s_0 \cos(\omega\, t + \varphi_1) \cos(k\, x + \varphi_2) = -\omega^2\, s(x,t)$.

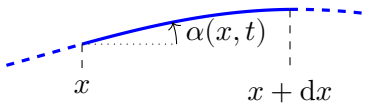
L'équation de d'Alembert donne alors : $-k^2\, s(x,t) - \dfrac{1}{v^2}\left[-\omega^2\, s(x,t)\right] = 0$, d'où on en déduit la relation de dispersion : $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\lambda}{T}$.

Exercice 2 : Expérience de la corde de Melde

On considère une corde de longueur L et de masse linéique μ, initialement au repos le long de l'axe horizontal (Ox). L'extrémité en $x = 0$ est reliée à un vibreur vertical de pulsation ω, et l'extrémité en $x = L$ est reliée à une masse M par l'intermédiaire d'une poulie, comme représenté ci-dessous. On suppose que le mouvement de la corde est uniquement vertical, et on note $s(x,t)$ le déplacement vertical du point de la corde d'abscisse x à l'instant t. On note $\vec{T}(x,t)$ la tension exercée par le morceau de corde situé à droite de x sur le morceau situé à gauche de x. Comme cette tension est bien supérieure au poids de la corde, on néglige l'effet de la pesanteur sur la corde.



Pour établir l'équation de propagation vérifiée par le déplacement $s(x,t)$, on réalise un bilan de forces sur un petit élément de corde situé entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$, qui réalise un petit angle $\alpha(x,t)$ avec l'horizontale.



1. À l'aide de la projection selon l'axe (Ox) du principe fondamental de la dynamique appliqué à ce petit élément de corde, montrer que la norme de la tension $T(x,t)$ est constante le long de la corde.

On suppose dans la suite que la norme de la tension est également constante au cours du temps, et que celle-ci s'exprime $T = M\,g$. Ce résultat peut être démontré si l'amplitude des vibrations est faible.

2. À l'aide de la projection selon l'axe (Oy) du principe fondamental de la dynamique appliqué à ce petit élément de corde, montrer que le déplacement vérifie l'équation différentielle :

$$\mu\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = M\,g\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

3. Montrer que l'angle $\alpha(x,t)$ peut s'exprimer :

$$\alpha(x,t) \approx \frac{\partial s}{\partial x}.$$

4. En déduire que $s(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle, dont on exprimera la vitesse correspondante.

On observe expérimentalement que l'amplitude des oscillations de la corde devient très importante pour certaines pulsations d'excitation ω_n. Le système présente alors une résonance, et les oscillations sont observées de la forme :

$$s(x,t) = s_0 \sin(\omega_n\,t + \varphi_1)\sin(k_n\,x + \varphi_2).$$

5. Comment s'appelle ce type d'onde ?

6. Déterminer la relation liant ω_n et k_n sachant que $s(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert.

Comme l'amplitude du vibreur est faible par rapport à l'amplitude des ventres observés à la résonance, on peut supposer qu'il apparait un nœud de vibration en $x=0$, soit : $s(0,t)\approx 0$. De plus, on observe que la corde est immobile à l'extrémité $x=L$, soit : $s(L,t)=0$.

7. À partir de ces conditions aux limites, montrer que le vecteur d'onde à la résonance doit s'exprimer de la forme :

$$k_n = \frac{n\,\pi}{L}$$

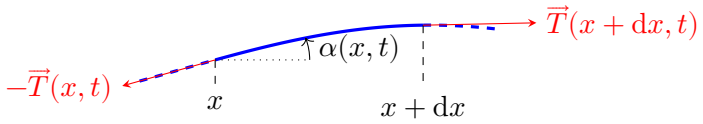
avec n un entier.

8. En déduire les fréquences de résonance f_n de la corde en fonction de n, L, μ, M et g.

Correction :

1. En négligeant le poids, ce petit élément de corde subit deux forces :

- une tension $\vec{T}(x+\mathrm{d}x,t)$ sur son extrémité droite ;
- une tension $-\vec{T}(x,t)$ sur son extrémité gauche, d'après le principe des actions réciproques.



Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce petit élément de masse $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}x$ donne alors : $\mu\,\mathrm{d}x\,\vec{a} = \vec{T}(x+\mathrm{d}x,t) - \vec{T}(x,t)$.

La projection selon l'axe (Ox) donne : $\mu\,\mathrm{d}x\,a_x = T(x+\mathrm{d}x,t)\cos\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - T(x,t)\cos\alpha(x,t)$. Comme on suppose que le mouvement de la corde est uniquement vertical, on en déduit que : $a_x = 0$. De plus, comme l'angle α est petit, on peut réaliser l'approximation : $\cos\alpha \approx 1$. On obtient finalement : $0 = T(x+\mathrm{d}x,t) - T(x,t)$, d'où : $T(x+\mathrm{d}x,t) = T(x,t)$, la tension est donc constante le long de la corde.

2. La projection selon l'axe (Oy) donne : $\mu\,\mathrm{d}x\,a_y = M\,g\sin\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - M\,g\sin\alpha(x,t)$, où l'accélération verticale peut s'exprimer : $a_y = \dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}$.
Comme l'angle α est petit, on peut réaliser l'approximation : $\sin\alpha \approx \alpha$, et on obtient : $\mu\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = M\,g\,[\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - \alpha(x,t)]$, avec $\alpha(x+\mathrm{d}x,t) \approx \alpha(x,t) + \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\mathrm{d}x$, soit finalement : $\mu\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = M\,g\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$.

3. On peut exprimer géométriquement : $\tan\alpha(x,t) \approx \dfrac{s(x+\mathrm{d}x,t) - s(x,t)}{\mathrm{d}x}$, avec $s(x+\mathrm{d}x,t) \approx s(x,t) + \dfrac{\partial s}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ et $\tan\alpha \approx \alpha$ comme cet angle est petit, soit : $\alpha(x,t) \approx \dfrac{\partial s}{\partial x}$.

4. On peut exprimer avec les résultats précédents : $\mu\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = M\,g\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} = M\,g\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{\mu}{M\,g}\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$.
On obtient bien l'équation de d'Alembert unidimensionnelle : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{1}{v^2}\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$, avec $v = \sqrt{\dfrac{M\,g}{\mu}}$ la vitesse correspondante.

5. Il s'agit d'une onde plane stationnaire.

6. On peut exprimer :

- $\dfrac{\partial s}{\partial x} = k_n\,s_0\sin(\omega_n\,t+\varphi_1)\cos(k_n\,x+\varphi_2)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k_n^2\,s_0\sin(\omega_n\,t+\varphi_1)\sin(k_n\,x+\varphi_2) = -k_n^2\,s(x,t)$;
- $\dfrac{\partial s}{\partial t} = \omega_n\,s_0\cos(\omega_n\,t+\varphi_1)\sin(k_n\,x+\varphi_2)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega_n^2\,s_0\sin(\omega_n\,t+\varphi_1)\sin(k_n\,x+\varphi_2) = -\omega_n^2\,s(x,t)$.

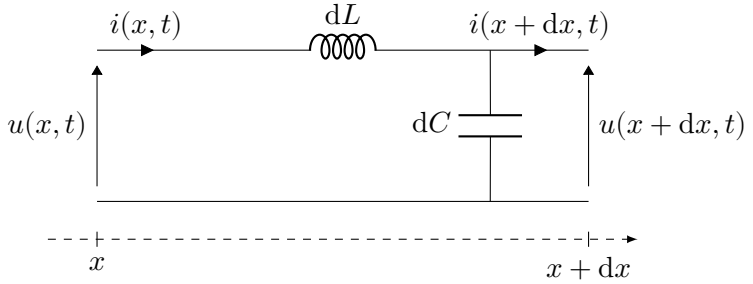
L'équation de d'Alembert donne alors : $-k_n^2\,s(x,t) - \dfrac{1}{v^2}\,[-\omega_n^2\,s(x,t)] = 0$, d'où on en déduit la relation : $\omega_n = v\,k_n$.

7. Comme $s(0,t) = 0$, on en déduit que : $\sin(\varphi_2) = 0$, d'où : $\varphi_2 = m\,\pi$, avec m un entier.
Comme $s(L,t) = 0$, on en déduit que : $\sin(k_n\,L + m\,\pi) = 0$, d'où : $k_n\,L = n\,\pi$, avec n un entier, et on obtient finalement : $k_n = \dfrac{n\,\pi}{L}$.

8. Les fréquences de résonance de la corde sont : $f_n = \dfrac{\omega_n}{2\,\pi} = \dfrac{v\,k_n}{2\,\pi} = \dfrac{n}{2\,L}\sqrt{\dfrac{M\,g}{\mu}}$.

Exercice 3 : Étude d'une ligne à constantes réparties

Un câble coaxial, constitué de deux conducteurs concentriques séparés par un isolant, est caractérisé par une inductance linéique Λ (en $\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) et une capacité linéique Γ (en $\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$). Il peut être modélisé par une ligne à constantes réparties, c'est-à-dire qu'on associe à chaque portion de longueur $\mathrm{d}x$ du câble une inductance élémentaire $\mathrm{d}L = \Lambda\,\mathrm{d}x$ et une capacité élémentaire $\mathrm{d}C = \Gamma\,\mathrm{d}x$. Le schéma électrique d'une portion est représenté ci-dessous.



1. À l'aide de la loi des mailles, montrer qu'à l'ordre le plus bas en $\mathrm{d}x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\,\frac{\partial i}{\partial t}.$$

2. À l'aide de la loi des nœuds, montrer qu'à l'ordre le plus bas en $\mathrm{d}x$:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}.$$

3. En déduire que la tension et l'intensité vérifient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle, et déterminer l'expression de la vitesse v des ondes dans le câble.

On considère tout d'abord un câble de longueur infinie. On suppose qu'il se propage dans le sens des x croissants une onde de courant de la forme $i_+(x,t) = f(x - v\,t)$, avec f une fonction quelconque.

4. Exprimer la tension $u_+(x,t)$ en fonction de $i_+(x,t)$ pour cette onde.

5. En déduire l'impédance caractéristique du câble Z_{car} définie telle que :

$$Z_{\text{car}} = \frac{u_+(x,t)}{i_+(x,t)}.$$

On suppose maintenant qu'il se propage uniquement dans le sens des x décroissants une onde de courant de la forme $i_-(x,t) = g(x + v\,t)$, avec g une fonction quelconque.

6. Exprimer la tension $u_-(x,t)$ en fonction de $i_-(x,t)$ pour cette onde.

On considère dans la suite un câble de longueur L finie, dans lequel on envoie une onde incidente $i_+(x,t) = f(x - v\,t)$. Celle-ci se réfléchie à l'extrémité $x = L$ du câble qui est reliée à une résistance R_0, donnant naissance à une onde réfléchie $i_-(x,t) = g(x + v\,t)$. On définit le coefficient de réflexion en intensité r en bout de ligne tel que :

$$i_-(L,t) = r\,i_+(L,t).$$

7. Exprimer le coefficient de réflexion r en fonction de Z_{car} et R_0.

8. Que se passe-t-il si on utilise une résistance de valeur $R_0 = Z_{\text{car}}$?

9. Que se passe-t-il si on court-circuite le câble en $x = L$?

Correction :

1. La loi des mailles donne : $u(x,t) = \mathrm{d}L \dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + u(x+\mathrm{d}x,t)$, avec $\mathrm{d}L = \Lambda\,\mathrm{d}x$ et $u(x+\mathrm{d}x,t) \approx u(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x$, soit : $u(x,t) = \Lambda\,\mathrm{d}x \dfrac{\partial i}{\partial t}(x,t) + u(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x$, d'où : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}$.

2. La loi des nœuds donne : $i(x,t) = i(x+\mathrm{d}x,t) + \mathrm{d}C \dfrac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t)$, avec $\mathrm{d}C = \Gamma\,\mathrm{d}x$ et $i(x+\mathrm{d}x,t) \approx i(x,t) + \dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x$, soit : $i(x,t) = i(x,t) + \dfrac{\partial i}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x + \Gamma\,\mathrm{d}x \dfrac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t)$, où $\mathrm{d}x \dfrac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x,t) \approx \mathrm{d}x \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ à l'ordre le plus bas en $\mathrm{d}x$, d'où finalement : $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

3. Pour obtenir l'équation vérifiée par $u(x,t)$, on peut exprimer à l'aide des résultats précédents : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}\right) = -\Lambda \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial i}{\partial x}\right) = \Lambda\,\Gamma \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, d'où : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda\,\Gamma \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.
Pour obtenir l'équation vérifiée par $i(x,t)$, on peut exprimer à l'aide des résultats précédents : $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial i}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = -\Gamma \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = \Lambda\,\Gamma \dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2}$, d'où : $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \Lambda\,\Gamma \dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$.
La tension et l'intensité vérifient bien l'équation de d'Alembert unidimensionnelle, et la vitesse des ondes dans le câble est : $v = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\,\Gamma}}$.

4. En posant la variable $y = x - v\,t$, on peut exprimer : $\dfrac{\partial u_+}{\partial x} = \dfrac{\partial u_+}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial i_+}{\partial t} = \dfrac{\partial i_+}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$, avec $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 1$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t} = -v$. La relation obtenue avec la loi des mailles donne alors : $\dfrac{\partial u_+}{\partial y} = \Lambda\,v \dfrac{\partial i_+}{\partial y}$.
En intégrant selon y, on obtient : $u_+(y) = \Lambda\,v\,i_+(y)$, où la constante d'intégration est nulle car il n'y a pas de tension sans onde de courant, d'où finalement : $u_+(x,t) = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}\,i_+(x,t)$.

5. L'impédance caractéristique du câble est : $Z_{\text{car}} = \dfrac{u_+(x,t)}{i_+(x,t)} = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$.

6. En posant la variable $z = x + v\,t$, on peut exprimer : $\dfrac{\partial u_-}{\partial x} = \dfrac{\partial u_-}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial i_-}{\partial t} = \dfrac{\partial i_-}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial t}$, avec $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$ et $\dfrac{\partial z}{\partial t} = v$. La relation obtenue avec la loi des mailles donne alors : $\dfrac{\partial u_-}{\partial z} = -\Lambda\,v\,\dfrac{\partial i_-}{\partial z}$.
En intégrant selon z, on obtient : $u_-(z) = -\Lambda\,v\,i_-(z)$, où la constante d'intégration est nulle car il n'y a pas de tension sans onde de courant, d'où finalement : $u_-(x,t) = -\sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}\,i_-(x,t) = -Z_{\text{car}}\,i_-(x,t)$.

7. La loi d'Ohm à l'extrémité $x = L$ impose : $u(L,t) = R_0\,i(L,t)$, où on peut exprimer par superposition :
- $i(L,t) = i_+(L,t) + i_-(L,t) = i_+(L,t) + r\,i_+(L,t) = (1+r)\,i_+(L,t)$;
- $u(L,t) = u_+(L,t) + u_-(L,t) = Z_{\text{car}}\,i_+(L,t) - Z_{\text{car}}\,i_-(L,t) = Z_{\text{car}}\,i_+(L,t) - Z_{\text{car}}\,r\,i_+(L,t)$, soit : $u(L,t) = Z_{\text{car}}\,(1-r)\,i_+(L,t)$;

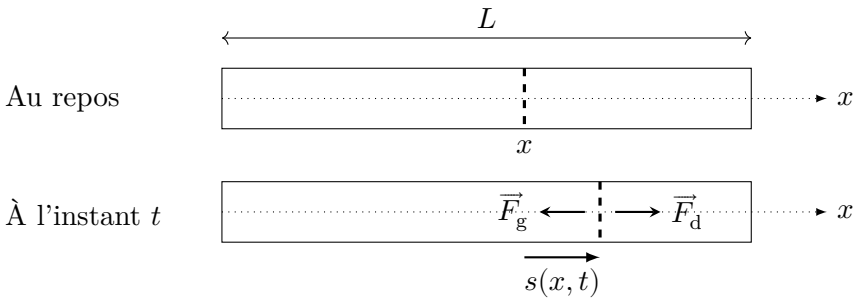
on obtient alors : $Z_{\text{car}}\,(1-r)\,i_+(L,t) = R_0\,(1+r)\,i_+(L,t)$, d'où finalement : $r = \dfrac{Z_{\text{car}} - R_0}{Z_{\text{car}} + R_0}$.

8. Si $R_0 = Z_{\text{car}}$, on obtient : $r = 0$, il n'y a pas d'onde réfléchie (on dit qu'il y a adaptation d'impédance).

9. Le court-circuit à l'extrémité $x = L$ impose : $u(L,t) = 0$, soit : $Z_{\text{car}}\,(1-r)\,i_+(L,t) = 0$, d'où : $r = 1$, l'onde est totalement réfléchie.

Exercice 4 : Vibrations longitudinales dans une lame

On étudie les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L, de section S et de masse volumique ρ. La section située à l'abscisse x au repos est mise en mouvement suite à la propagation d'une onde, elle se retrouve alors à l'abscisse $x + s(x,t)$ à l'instant t. Cette section est soumise à une force $\vec{F}_{\text{d}} = F(x,t)\,\vec{e}_x$ exercée par la matière située à sa droite et à une force $\vec{F}_{\text{g}} = -F(x,t)\,\vec{e}_x$ exercée par la matière située à sa gauche. La déformation de la lame est caractérisée par un module d'Young E, c'est-à-dire qu'un allongement $\delta\ell$ d'une portion de lame de longueur ℓ_0 nécessite d'appliquer une force d'intensité $\dfrac{E\,S\,\delta\ell}{\ell_0}$ à ses extrémités.



On considère une tranche de matériau qui est comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ au repos.

1. Montrer que l'allongement de cette tranche d'épaisseur $\mathrm{d}x$ à l'instant t peut s'exprimer :

$$\delta(\mathrm{d}x) \approx \frac{\partial s}{\partial x}\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire l'expression de la force $F(x,t)$ exercée par la matière.

3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à cette tranche, montrer que $s(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle, et en déduire l'expression de la célérité des ondes longitudinales.

On observe l'établissement dans la lame d'une onde plane stationnaire de la forme :

$$s(x,t) = s_0 \cos(k\,x + \varphi_1)\cos(\omega\,t + \varphi_2)$$

avec s_0, φ_1 et φ_2 des constantes.

4. Établir la relation entre le vecteur d'onde k et la pulsation ω de l'onde stationnaire.

5. Sachant que les deux extrémités de la lame ne sont soumises à aucune force, montrer que le vecteur d'onde ne peut prendre que certaines valeurs que l'on exprimera.

6. En déduire l'expression des fréquences qui peuvent s'établir dans la lame en fonction de E, ρ et L.

La plus petite fréquence de vibration longitudinale mesurée pour une lame en acier de longueur $L = 20\,\text{cm}$ et de masse volumique $\rho = 8{,}7.10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ est $f_1 = 12\,\text{kHz}$.

7. Estimer le module d'Young de cette lame en acier.

Correction :

1. À l'instant t, cette tranche est comprise entre les abscisses $x + s(x,t)$ et $x + \mathrm{d}x + s(x + \mathrm{d}x, t)$, elle a donc une épaisseur : $x + \mathrm{d}x + s(x + \mathrm{d}x, t) - x - s(x,t) \approx \mathrm{d}x + \dfrac{\partial s}{\partial x}\,\mathrm{d}x$ au premier ordre.

Son allongement par rapport à son épaisseur $\mathrm{d}x$ au repos s'exprime alors : $\delta(\mathrm{d}x) = \dfrac{\partial s}{\partial x}\,\mathrm{d}x$.

2. Un allongement $\delta(\mathrm{d}x)$ d'une portion de longueur $\mathrm{d}x$ correspond à une force exercée par la matière qui s'exprime : $F(x,t) = \dfrac{E\,S\,\delta(\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = E\,S\,\dfrac{\partial s}{\partial x}$.

3. Cette tranche est soumise à deux forces horizontales :

- la force exercée sur son extrémité en $x + \mathrm{d}x + s(x + \mathrm{d}x, t)$ par la matière située à sa droite : $\overrightarrow{F_\mathrm{d}} = F(x + \mathrm{d}x + s(x + \mathrm{d}x, t), t)\,\vec{e}_x$;
- la force exercée sur son extrémité en $x + s(x,t)$ par la matière située à sa gauche : $\overrightarrow{F_\mathrm{g}} = -F(x + s(x,t), t)\,\vec{e}_x$.

L'application du PFD selon l'axe horizontal à cette tranche de masse $\mathrm{d}m = \rho\,S\,\mathrm{d}x$ donne au premier ordre : $\rho\,S\,\mathrm{d}x\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} \approx F(x + \mathrm{d}x, t) - F(x,t) \approx \dfrac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x = E\,S\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x$, on obtient bien l'équation de d'Alembert unidimensionnelle : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \dfrac{\rho}{E}\,\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$, et on en déduit l'expression de la célérité des ondes longitudinales : $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

4. On peut exprimer :

- $\dfrac{\partial s}{\partial x} = -k\,s_0 \sin(k\,x + \varphi_1)\cos(\omega\,t + \varphi_2)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2\,s_0 \cos(k\,x + \varphi_1)\cos(\omega\,t + \varphi_2) = -k^2\,s(x,t)$;
- $\dfrac{\partial s}{\partial t} = -\omega\,s_0 \cos(k\,x + \varphi_1)\sin(\omega\,t + \varphi_2)$, d'où : $\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2\,s_0 \cos(k\,x + \varphi_1)\cos(\omega\,t + \varphi_2) = -\omega^2\,s(x,t)$.

L'équation de d'Alembert donne alors : $-k^2\,s(x,t) - \dfrac{1}{v^2}\left[-\omega^2\,s(x,t)\right]$, d'où : $k = \dfrac{\omega}{v}$.

5. Comme il ne s'exerce aucune force aux extrémités de la lame, on en déduit que : $F(0,t) = F(L,t) = 0$, avec $F(x,t) = E\,S\,\dfrac{\partial s}{\partial x} = -k\,E\,S\,s_0 \sin(k\,x + \varphi_1)\cos(\omega\,t + \varphi_2)$.

La condition $F(0,t) = 0$ donne : $\sin(\varphi_1) = 0$, d'où : $\varphi_1 = m\,\pi$, avec m un entier.

La condition $F(L,t) = 0$ donne : $\sin(k\,L + \varphi_1) = 0$, d'où : $k\,L = n\,\pi$, avec n un entier, et on obtient finalement : $k = \dfrac{n\,\pi}{L}$.

6. Les fréquences qui peuvent s'établir dans la lame sont : $f = \dfrac{\omega}{2\,\pi} = \dfrac{v\,k}{2\,\pi} = \dfrac{n}{2\,L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, avec n un entier.

7. La plus petite fréquence correspondant à $n = 1$, on obtient alors : $E = 4\,L^2\,f_1^2\,\rho = 2{,}0.10^{11}\,\text{Pa}$.